

# TD Convexité

## 6TA Exercice 1

1. Montrer que  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ .
2. Soient  $a, b, p, q > 0$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , montrer que  $\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \geq a^{1/p}b^{1/q}$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $e^{\lambda x} \leq (\frac{1+x}{2})e^{\lambda} + (\frac{1-x}{2})e^{-\lambda}$ .

**ORH Exercice 2** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe continue.

1. Montrer que  $\max_{[a,b]} f = \max(f(a), f(b))$ .
2. Que dire de l'ensemble des points où  $f$  atteint un minimum ?

**UYJ Exercice 3** **INÉGALITÉS DES MOYENNES** Soit  $x_1, \dots, x_n$  des réels strictement positifs et des poids  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  strictement positifs, de somme 1. Pour  $\alpha \neq 0$ , on définit la moyenne d'ordre  $\alpha$ ,  $M(\alpha) = (\sum \lambda_i x_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

1. Montrer que la fonction  $M$  se prolonge par continuité en 0 par la moyenne géométrique  $\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}$ .
2. Montrer que pour tous  $\alpha > 0$ ,  $\prod x_i^{\lambda_i} \leq (\sum \lambda_i x_i^\alpha)^{1/\alpha}$ .
3. Montrer que  $M$  est croissante. Quelles sont ses limites en  $\pm\infty$  ?

**P9B Exercice 4** Notons  $A, B, C$  les angles d'un triangle. Quelle est la valeur maximale que peut prendre la somme  $\sin A + \sin B + \sin C$  ?

**R0E Exercice 5** 1. Soit  $f$  convexe et dérivable sur  $[a, b]$ . Montrer que  $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ .

2. ★ Étendre le résultat sans l'hypothèse de dérivabilité.

**VHE Exercice 6** Montrer que si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et bornée, elle est constante. Est-ce le cas pour une fonction  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ?

**Z3R Exercice 7** 1. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et convexe. Montrer que  $f$  admet une limite en  $+\infty$ .

2. Montrer que si  $f$  converge en  $+\infty$ , alors  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $f$  est décroissante.

**KAI Exercice 8** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue vérifiant  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{D}_2 = \{\frac{p}{2^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
2. ★ Montrer que  $f$  est convexe.

**ICI Exercice 9** ★ Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe inférieure à  $f$ .

**UG2 Exercice 10** ★ Soit  $f$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si  $\forall x, \forall h > 0$ ,  $2hf(x) \leq \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$ .

**Indication :** Les deux hypothèses sont invariantes par l'ajout d'une fonction affine.

# TD Convexité

## 6TA Exercice 1

1. Montrer que  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ .
2. Soient  $a, b, p, q > 0$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , montrer que  $\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \geq a^{1/p}b^{1/q}$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $e^{\lambda x} \leq (\frac{1+x}{2})e^{\lambda} + (\frac{1-x}{2})e^{-\lambda}$ .

**ORH Exercice 2** Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe continue.

1. Montrer que  $\max_{[a,b]} f = \max(f(a), f(b))$ .
2. Que dire de l'ensemble des points où  $f$  atteint un minimum ?

**UYJ Exercice 3** **INÉGALITÉS DES MOYENNES** Soit  $x_1, \dots, x_n$  des réels strictement positifs et des poids  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  strictement positifs, de somme 1. Pour  $\alpha \neq 0$ , on définit la moyenne d'ordre  $\alpha$ ,  $M(\alpha) = (\sum \lambda_i x_i^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ .

1. Montrer que la fonction  $M$  se prolonge par continuité en 0 par la moyenne géométrique  $\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}$ .
2. Montrer que pour tous  $\alpha > 0$ ,  $\prod x_i^{\lambda_i} \leq (\sum \lambda_i x_i^\alpha)^{1/\alpha}$ .
3. Montrer que  $M$  est croissante. Quelles sont ses limites en  $\pm\infty$  ?

**P9B Exercice 4** Notons  $A, B, C$  les angles d'un triangle. Quelle est la valeur maximale que peut prendre la somme  $\sin A + \sin B + \sin C$  ?

**R0E Exercice 5** 1. Soit  $f$  convexe et dérivable sur  $[a, b]$ . Montrer que  $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ .

2. ★ Étendre le résultat sans l'hypothèse de dérivabilité.

**VHE Exercice 6** Montrer que si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et bornée, elle est constante. Est-ce le cas pour une fonction  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ?

**Z3R Exercice 7** 1. Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et convexe. Montrer que  $f$  admet une limite en  $+\infty$ .

2. Montrer que si  $f$  converge en  $+\infty$ , alors  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $f$  est décroissante.

**KAI Exercice 8** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue vérifiant  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{D}_2 = \{\frac{p}{2^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
2. ★ Montrer que  $f$  est convexe.

**ICI Exercice 9** ★ Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe inférieure à  $f$ .

**UG2 Exercice 10** ★ Soit  $f$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est convexe si et seulement si  $\forall x, \forall h > 0$ ,  $2hf(x) \leq \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$ .

**Indication :** Les deux hypothèses sont invariantes par l'ajout d'une fonction affine.